

مقدمه ناشر

گپی راجع به مجموعه «ماجرای بیست»

تا حالا به این فکر کردین که به دانش آموز توی ۲۴ ساعت شبانه روز چی کار می‌کنه؟

■ هفت هشت ساعت می‌خواهه و استراحت می‌کنه.

■ حداقل هفت ساعت تو مدرسه‌ست که شیش ساعتش رو سر کلاسه و (احتمالاً) داره درس گوش می‌ده.

■ حدود یک ساعت تو راه خونه به مدرسه و مدرسه به خونه‌ست.

■ سه چهار ساعتی هم توی خونه با کتابا و درساش مشغوله و کُشتی می‌گیره.

■ چهار پنج ساعت از وقتش هم می‌ره برای غذاخوردن، حضور در آغوش گرم خانواده و کارای شخصی مهم و بازی‌گوشی (که شامل گوش‌بازی هم می‌شه!)

خُب! با این حساب و کتابا معلوم می‌شه به دانش آموز، ۷۵/۶۲۵ درصد از زمان بیداریش رو با درس و مشق و کتاب و مدرسه و معلم می‌گذرونه با کلی اتفاقات تلخ و شیرین؛ پس بی‌راه نیست که بگیم:

«ماجرای بیست» ماجرای اصلی زندگی به دانش آموزه.

ما توی خیلی‌سبز این مجموعه رو آماده کردیم، چون واقعاً دلمون می‌خواد داستان مدرسه‌رفتن و درس‌خوندن شما و این عمری که به پاش گذاشتین، پایان خیلی خوش و شکوهمندی داشته باشه!

اگه ماجراهای جالب خودتون با درساتون رو به صورت مطلب، عکس، سلفی، خاطره، فیلم و فیلم‌نامه و ... برامون بفرستین، خیلی رو سرمون منت گذاشتین. ما حتمن ماجراهاتون رو به جایی (مثلن تو سایت خیلی‌سبز یا شاید هم چاپ بعدی کتاب) منتشر می‌کنیم.

ماجرای من و ریاضی ۱

چند وقتی که ذهنم با چندتا سؤال بی‌ربط ولی بنیادی درگیر شده؛ گفتم با شما هم درمیان بذارم شاید شما جواب قانع‌کننده‌ای داشته باشین!

۱- چرا عرب‌زبان‌ها به ورزش می‌گن الرياضیه ولی ما به ریاضی می‌گیم ریاضی؟

۲- مهندس علی دایی (که مدرکشون رو از دانشگاه صنعتی شریف گرفتن)، چون ریاضی بلدن پولدار شدن یا چون ورزشکار هستن؟

۳- چرا بعضی از تیم‌های ورزشی وقتی فوتبال بازی می‌کنن، آدم احساس می‌کنه اینا انقد خوبن که دارن مسئله‌المپیاد ریاضی حل می‌کنن! ولی بعضیا وقتی دارن جمع و تفریق می‌کنن، انگار دارن به خودشون لایی می‌زنن؟

۴- معروف، معروف‌تر است یا مریم میرزاخانی؟

۵- کدوم بیشتر حال می‌ده؟ در زنگ ورزش ریاضی بخونیم یا در زنگ ریاضی ورزش کنیم؟

اگر در مورد این سؤالا نظری دارین برام بفرستید؛ شاید از مشغولیت‌های ذهنی بنده کم کنید. البته به یه نتایجی رسیدم! ورزشکارایی که ریاضی خوندن و ریاضی‌دانایی که ورزشکارن، خیلی کارشون درسته!

ریاضی بخونید! ورزش کنید! ماجراجو باشید!

مقدمه مؤلف

به نام او که از همه بیشتر تو را دوست دارد

بچه‌ها سلام! ورودتون رو به دبیرستان تبریک می‌گم. می‌بینم که همه‌تون آماده‌اید. به نظرم ریاضی امسال مهم‌ترین ریاضی دوران تحصیل‌تونه. می‌دونم الان می‌گید همه دبیرا اولش همینو می‌گن ولی اگه ادامه مقدمه رو بخونین، شما هم با من موافق می‌شید. ریاضی امسالتون هفت تا فصل داره. اول برای بچه‌های ریاضی بگم:

فصل اول ادامه مباحث مجموعه است. در فصل‌های بعدی هم کمی به اون نیاز دارید. با دنباله‌ها هم آشنا می‌شید. به خصوص دنباله خطی، حسابی و هندسی که اهمیت زیادی دارن.

فصل دوم بای بسم!... مثلثات هستش. ادامه اون رو هم سال بعد می‌خونید، پس پایه برای سال بعده و رد پاش تو خیلی از جاهای دیگه دیده می‌شه.

فصل سوم اوایلش تا حدودی براتون آشناست. همون ریشه‌گیری و قواعد اونه. البته آخرای فصل، چیزهای مهم و جدیدی براتون داره.

فصل چهارم به نظرم از مهم‌ترین فصل‌های کتابتونه. تو خیلی از مسئله‌ها مجبورید معادله حل کنید به خصوص توی حسابان!

حسابان ۲ و کنکور هم که دیگه جای خود داره.

فصل پنجم راجع به تابع صحبت می‌کنه. الفبای تابع رو یاد می‌گیرید، ادامه اون رو هم باز دوباره تو حسابان می‌خونید.

تو **فصل ششم** باید بشمرین، البته بدون انگشت! از این فصل به سادگی عبور نکنید. اگر مطالب اون رو خوب بفهمید، کارتتون تو فصل احتمال خیلی ساده می‌شه. این درس هم پایه برای درس آمار و احتمال سال بعدتونه.

اما **فصل هفتم** احتمال، یه کمی هم آخرش آمار داره که آسونه، البته به شرطی که فصل ۶ رو خوب فهمیده باشین. برای بچه‌های تجربی هم تقریباً همینه. ادامه مباحث مثلثات، تابع و احتمال رو توی سال‌های بعد می‌خونید و بقیه مطالب رو هم به عنوان پایه نیاز دارید. دیدید حالا! ریاضی سال‌های بعدتون وابستگی زیادی به این کتاب داره. چندتا توصیه هم می‌کنم برای این که از این کتاب بهتر استفاده کنین:

(۱) درس‌نامه‌ها پله‌پله طبقه‌بندی شدن. حتماً پله‌پله‌ها رو یکی‌یکی بالا برین و دوتا یکی نپرین.

(۲) بعد از درس‌نامه، مثال و جواب داریم. حتماً اون‌ها رو بخونین و دوباره خودتون حل کنید.

(۳) حالا کار اصلی شما شروع می‌شه. قلم به دست بگیرید! تا شروع به حل مسئله نکنین، متوجه اشتباهتون نمی‌شین. کسی با نگاه به مسابقات المپیک، قهرمان نمی‌شه، بنابراین برید وسط گود! بچه‌ها خودتون رو عادت به مسئله حل کردن بدین. توانایی حل مسئله و سرعت عمل شما (که تو کنکور بسیار مهمه) امسال باید درست بشه. سال‌های بعد وقت نمی‌کنین.

(۴) **سؤال‌هایی که علامت دارن، سخت‌ترین سؤال‌های هر درس هستن. اگر به کم‌تر از ۲۰ راضی نمی‌شی، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگر،**

برو سراغ اون‌ها ...

(۵) اگر به هر دلیلی نتونستین مسئله‌ای رو حل کنین، نگران نباشین، چون پاسخ‌های تشریحی برای همین نوشته شده.

دیدن پاسخ تشریحی و یادگرفتن راه حل‌ها هیچ اشکالی نداره البته به دو شرط:

اول این که درس‌نامه‌ها رو کامل خونده باشین.

(۶) امیدوارم همه‌تون با مطالعه این کتاب عاشق ریاضی بشید.

(۷) سلام برسونین.


در پایان از همه کسانی که مرا در نوشتن این کتاب یاری کردند، صمیمانه تشکر می‌کنم و هم‌چنین از دانش‌آموزان عزیز، محمد یزدان‌پناه، وستا محمدزاده، حمیده محمدزاده، گلستا ترابی و صبا فلاح و سوگند یوسف مارزی و صوفیا قربانی که در رفع اشکالات کتاب ما را یاری کردند سپاسگزارم.

۱۴۰۲/۳/۱


دوستدار تون دیداری


فهرست

	۲۵	درسنامه ۵: دنباله هندسی	۷	فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله
	۳۰	آزمون جمع‌بندی فصل اول	۷	درسنامه ۱: مجموعه‌های منتهی و نامتناهی
	۳۱	پاسخ‌نامه تشریحی	۱۱	درسنامه ۲: متمم یک مجموعه - شمارش تعداد عضوهای مجموعه
	۳۸	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل اول	۱۶	درسنامه ۳: الگو و دنباله
			۲۲	درسنامه ۴: دنباله حسابی


	۵۵	آزمون جمع‌بندی فصل دوم	۴۰	فصل دوم: مثلثات
	۵۶	پاسخ‌نامه تشریحی	۴۰	درسنامه ۱: نسبت‌های مثلثاتی
	۶۴	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل دوم	۴۶	درسنامه ۲: دایره مثلثاتی
			۵۲	درسنامه ۳: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

	۷۴	درسنامه ۴: عبارتهای جبری	۶۵	فصل سوم: توان‌های گویا و عبارتهای جبری
	۷۸	درسنامه ۵: عبارتهای گویا	۶۵	درسنامه ۱: ریشه و توان
	۸۲	آزمون جمع‌بندی فصل سوم	۶۸	درسنامه ۲: ریشه نام
	۸۳	پاسخ‌نامه تشریحی	۷۱	درسنامه ۳: توان‌های گویا
	۹۰	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل سوم		

	۱۰۷	درسنامه ۴: حل نامعادله	۹۲	فصل چهارم: معادلات و نامعادلات
	۱۱۴	آزمون جمع‌بندی فصل چهارم	۹۲	درسنامه ۱: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن
	۱۱۵	پاسخ‌نامه تشریحی	۹۸	درسنامه ۲: سهمی
	۱۳۰	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل چهارم	۱۰۴	درسنامه ۳: تعیین علامت

	۱۴۵	درسنامه ۴: انتقال توابع	۱۳۱	فصل پنجم: تابع
	۱۴۹	آزمون جمع‌بندی فصل پنجم	۱۳۱	درسنامه ۱: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن
	۱۵۰	پاسخ‌نامه تشریحی	۱۳۴	درسنامه ۲: دامنه و برد توابع
	۱۵۹	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل پنجم	۱۴۰	درسنامه ۳: انواع توابع

	۱۷۰	درسنامه ۳: ترکیب	۱۶۰	فصل ششم: شمارش، بدون شمردن
	۱۷۷	آزمون جمع‌بندی فصل ششم	۱۶۰	درسنامه ۱: شمارش
	۱۷۸	پاسخ‌نامه تشریحی	۱۶۵	درسنامه ۲: جایگشت
	۱۸۴	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل ششم		

	۱۹۶	درسنامه ۳: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه، متغیر و انواع آن	۱۸۵	فصل هفتم: آمار و احتمال
	۲۰۱	آزمون جمع‌بندی فصل هفتم	۱۸۵	درسنامه ۱: تعریف‌های مقدماتی احتمال
	۲۰۲	پاسخ‌نامه تشریحی	۱۹۰	درسنامه ۲: احتمال یا اندازه‌گیری شانس
	۲۰۷	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل هفتم		

شماره صفحه پاسخ	شماره صفحه امتحان	
۲۱۰	۲۰۸	امتحان شماره (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول
۲۱۴	۲۱۲	امتحان شماره (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول
۲۱۸	۲۱۶	امتحان شماره (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
۲۲۲	۲۲۰	امتحان شماره (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
۲۲۶	۲۲۴	امتحان شماره (۵): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
۲۳۰	۲۲۸	امتحان شماره (۶): امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

یادآوری مجموعه‌های مهم و اعمال روی آن‌ها

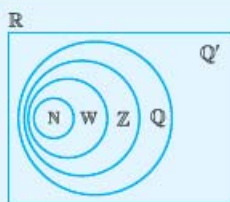
قبل از این که درس اصلی را شروع کنیم، بد نیست چند مطلب را با هم مرور کنیم:

- ۱ مجموعه، دسته‌ای از اشیای کاملاً معین است.
 - ۲ اگر شیء a ، متعلق به مجموعه A باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و اگر متعلق به A نباشد، می‌نویسیم $a \notin A$.
 - ۳ مجموعه A را زیرمجموعه B گوئیم، هرگاه همهٔ عضوهای A متعلق به B هم باشند و می‌نویسیم $A \subseteq B$.
- در سال نهم با نماد و عضوهای مجموعه‌های مهم و پرتکرار آشنا شدید. یک بار آن‌ها را مرور کنیم:

نام مجموعه	نماد	عضوهای مجموعه	نکته‌ها
اعداد طبیعی	\mathbb{N}	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$	بزرگ‌ترین عدد طبیعی وجود ندارد.
اعداد حسابی	\mathbb{W}	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	تنها عدد حسابی غیرطبیعی، صفر است.
اعداد صحیح	\mathbb{Z}	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	—
اعداد گویا	\mathbb{Q}	$\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$	<p>۱) اعداد گویا، اعداد کسری هستند که صورت و مخرج صحیح بوده و مخرج مخالف صفر باشد.</p> <p>۲) $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}} = 0$ تعریف نشده است.</p> <p>۳) $\frac{0}{\text{عدد غیر صفر}} = 0$</p>
اعداد گنگ	\mathbb{Q}^c یا \mathbb{Q}'	اعدادی که نمی‌توان آن‌ها را به صورت تقسیم دو عدد صحیح نوشت.	<p>۱) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ و نمونه‌هایی از اعداد گنگ هستند.</p> <p>۲) مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم دو عدد گنگ، ممکن است گنگ نباشد.</p>
اعداد حقیقی	\mathbb{R}	اجتماع اعداد گویا و گنگ $(\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}')$	کل اعداد روی محور تشکیل اعداد حقیقی را می‌دهند.

$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

$$Q' \subseteq R$$



یادآوری خوب است یک یادآوری هم دربارهٔ اعمال روی مجموعه‌ها داشته باشیم:

عمل	نماد	تعریف	نمودار ون	نکته‌ها
اجتماع	$A \cup B$	اشیایی که در A یا در B (یا هر دو) (به زبان دیگر عضو حداقل یکی از مجموعه‌ها) هستند. (به «یا» دقت کن.)		۱) $A \cup A = A$ ۲) $A \cup \emptyset = A$ ۳) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$
اشتراک	$A \cap B$	اشیایی که در هر دوی A و B (مشترک‌ها) هستند. (به «و» دقت کن.)		۱) $A \cap A = A$ ۲) $A \cap \emptyset = \emptyset$ ۳) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$
تفاضل	$A - B$	اشیایی که در A هستند ولی در B نیستند. (فقط عضو A هستند.) (به «فقط» دقت کن.)		۱) $A - B$ با $B - A$ فرق دارد. ۲) $B - A$ شامل عضوهایی است که در B هستند ولی در A نیستند. ۲) $A - \emptyset = A$, $\emptyset - A = \emptyset$ ۳) $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$

مثال اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{-1, 0, 2, 7\}$ باشد، مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را به دست آورید.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{-1, 0, 2, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, -1, 0, 7\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{-1, 0, 2, 7\} = \{2\}$$

$$A - B = \{1, \cancel{2}, 3, 4, 5\} - \{-1, 0, 2, 7\} = \{1, 3, 4, 5\}$$

 (عدد ۲ در B هم هست، پس آن را از A حذف کردیم.)

$$B - A = \{-1, 0, \cancel{2}, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{-1, 0, 7\}$$

مثال با توجه به رابطهٔ زیر مجموعه‌بودن مجموعه‌های مهم، حاصل اعمال روی چند مجموعهٔ مهم را با هم بررسی کنیم:

$$N \subseteq Z \Rightarrow N \cup Z = Z, N \cap Z = N, N - Z = \emptyset, Z - N = \{0, -1, -2, \dots\}$$

$$Q \subseteq R \Rightarrow Q \cup R = R, Q \cap R = Q, Q - R = \emptyset, R - Q = Q'$$

بازه‌ها

مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین ۱ و ۰ (مثلاً $0/1$ ، $0/5$ ، $0/4$ ، $0/3$ ، $0/2$ ، $0/1$) را در نظر بگیرید. نمایش مجموعه‌ای این اعداد، به صورت $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ است. این مجموعه را به صورت ساده‌تر $(0, 1)$ نمایش داده (با نقطهٔ $(0, 1)$ روی دستگاه اشتباه‌نگیری!) و آن را بازهٔ صفر و یک می‌نامیم. چون خود ۱ و صفر عضو مجموعه نیستند، بازه را بازهٔ باز می‌نامیم. اگر عدد ۱ عضو بازه باشد، آن را به صورت $[0, 1)$ نشان می‌دهیم. در حالت کلی داریم:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی (روی محور)
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم‌باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
نیم‌باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	

توجه اگر (a, b) بازه باشد، باید $a < b$ باشد. در سؤال‌هایی که اول یا آخر بازه مجهول هستند، حواستان به این موضوع باشد.

ممکن است همهٔ اعداد حقیقی بزرگتر از a مدنظر باشند، در این صورت نمایش مجموعه‌ای آن به صورت $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ بوده و بازهٔ نظیر آن را به صورت $(a, +\infty)$ نمایش می‌دهیم. $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) عدد نیست، بلکه نشان می‌دهد بازه از راست بی‌کران است. در حالت کلی داریم:

نمایش هندسی (روی محور)	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	$(a, +\infty)$	باز و از راست بی‌کران
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	$[a, +\infty)$	نیم‌باز و از راست بی‌کران
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز و از چپ بی‌کران
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	نیم‌باز و از چپ بی‌کران
	\mathbb{R}	$(-\infty, +\infty)$	باز و از دو طرف بی‌کران

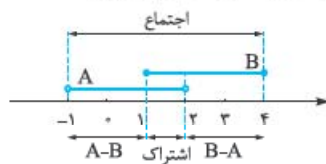
(توجه کن $+\infty$ یا $-\infty$ همیشه باز هستند)

مثال درستی یا نادرستی هر کدام را بررسی کنید:

الف) $0 \in (-1, 2)$ ب) $1 \in (1, 5]$ پ) $7 \in (-1, 7]$

پاسخ: الف) $0 \in (-1, 2)$ درست است، چون صفر بین -1 و 2 قرار دارد. هم‌چنین $0/2 \in (-1, 2)$ یا $\sqrt{2} \in (-1, 2)$ (دقت کن $[0, 1] \neq (-1, 2)$). ب) $1 \in (1, 5]$ درست نیست، چون بازه در سمت چپ باز بوده و عدد 1 عضو بازه نیست، اما $5 \in (1, 5]$ درست است. پ) $7 \in (-1, 7]$ درست است، چون سمت راست بازه بسته است اما $-1 \in (-1, 7]$ درست نیست. در نمایش این بازه روی محور، -1 توخالی است.

مثال بازه‌های $A = (-1, 2)$ و $B = [1, 4]$ را روی محور رسم کرده، اجتماع، اشتراک و تفاضل آن‌ها را به صورت بازه بنویسید.



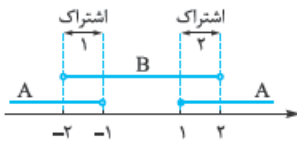
$$A \cup B = (-1, 4]$$

$$A \cap B = [1, 2)$$

پاسخ: شبیه این مثال معمولاً در امتحان می‌آید. ببینید:

(اعدادی که فقط در A هستند) $A - B = (-1, 1)$ (توجه دارید که $1 \in A$ و $1 \in B$ ، پس $1 \notin A - B$ و لذا بازه از راست باز خواهد بود). (اعدادی که فقط در B هستند) $B - A = [2, 4]$ (توجه دارید که $2 \in B$ ولی $2 \notin A$ ، پس $2 \in B - A$ بوده و بازه از چپ بسته می‌شود).

مثال مجموعهٔ $A = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ را روی محور رسم کرده و اشتراک آن را با بازهٔ $B = (-2, 2)$ به دست آورید.



پاسخ: نمایش مجموعه‌های A و B روی محور به صورت مقابل است.

این دو مجموعه در دو قسمت اشتراک دارند، بنابراین اشتراک آن‌ها را نمی‌توان به صورت یک بازه نوشت. داریم:

$$A \cap B = \underbrace{(-2, -1)}_{\text{قسمت (1)}} \cup \underbrace{[1, 2)}_{\text{قسمت (2)}}$$

● مورد داشتیم پرسیده آقا مگه اشتراک نبود، چرا بین اون‌ها اجتماع شد؟

بین A و B در کدام قسمت‌ها اشتراک دارند؟ در دو بازه که هر دوی اون‌ها هم قبوله، یعنی همه‌شون جزء جواب باید باشن. پس قسمت (1) اجتماع (به اضافه) قسمت (2).

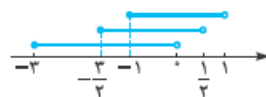
مثال اگر $A_n = \left[-\frac{3}{n}, \frac{n-1}{2}\right)$ باشد، آن‌گاه حاصل $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ را به دست آورید و تعداد اعداد صحیح در بازهٔ به دست آمده را معین کنید.

$$A_1 = [-3, 0)$$

پاسخ: برای به دست آوردن A_1 ، A_2 و A_3 به جای n به ترتیب 1 ، 2 و 3 قرار می‌دهیم:

$$A_2 = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$A_3 = [-1, 1)$$



$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [-3, 1)$$

جواب شامل اعداد صحیح -3 ، -2 ، -1 ، 0 و (یعنی چهار عدد صحیح) است.

تکرار $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ را خلاصه‌تر به صورت $\bigcup_{n=1}^3 A_n$ نیز نمایش می‌دهند.

مجموعه $A = \{-1, 2, 5\}$ ، ۳ عضو دارد؛ پس $n(A) = 3$ اما تعداد عضوهای مجموعه $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ را نمی‌توان با یک عدد حسابی، بیان کرد. مجموعه A نمونه‌ای از یک مجموعه متناهی (باپایان) و مجموعه B نمونه‌ای از یک مجموعه نامتناهی (بی‌پایان) است.

مجموعه متناهی

- مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد، مجموعه‌های متناهی (باپایان) می‌نامیم.
- ممکن است تعداد اعضای یک مجموعه، عدد حسابی بزرگی باشد اما باز هم مجموعه متناهی به حساب می‌آید.
- مجموعه \emptyset ، صفر عضو دارد، پس \emptyset هم یک مجموعه متناهی است.
- مجموعه‌ای که متناهی نباشد، نامتناهی می‌نامیم.

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های ستون سمت راست را مشخص کنید.

مجموعه	متناهی یا نامتناهی
$A =$ مجموعه اعداد اول دورقمی	متناهی، چون $A = \{11, 13, 17, \dots, 97\}$ بوده و تعداد اعضا، عدد حسابی است.
$B =$ مجموعه اعداد حسابی	نامتناهی، چون $B = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ بوده و تعداد اعضا، یک عدد حسابی نیست.
$C =$ مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۳	نامتناهی، چون $C = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$ بوده و تعداد اعضا، یک عدد حسابی نیست.
$D =$ مجموعه اعداد بین صفر و یک	نامتناهی، چون $D = (0, 1)$ و بی‌شمار عدد در این بازه وجود دارد.
$E =$ مجموعه مورچه‌های کره زمین در یک لحظه خاص	متناهی، چون تعداد آن‌ها بالاخره یک عدد حسابی است هر چند بسیار بزرگ خواهد بود.
$F =$ مجموعه اعداد گویا	نامتناهی، چون تعداد عددهای گویا، یک عدد حسابی نیست.
$G =$ مجموعه اعداد اعشاری بین $0/1$ و $0/2$	نامتناهی، چون بی‌شمار عدد اعشاری، بین هر دو عدد مختلف، وجود دارد.

در امتحان چه خبر؟

- نویس ۱:** نماد مجموعه‌های مهم، عضوهای آن‌ها و اعمال روی آن‌ها معمولاً به صورت جای خالی یا درست و نادرست از شما خواسته می‌شود.
- حالا تو حل کن:** سؤال‌های ۱ تا ۱۸
- نویس ۲:** مهم‌ترین موضوع درس اول، بازه‌ها است. از مفهوم بازه‌ها و اعمال روی آن‌ها (به‌خصوص تفاضل) حتماً در آزمون سؤال می‌آید.
- حالا تو حل کن:** سؤال‌های ۱۹ تا ۲۵ و ۴۴ و ۴۵
- نویس ۳:** متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های داده شده از شما خواسته می‌شود. هم‌چنین متناهی یا نامتناهی بودن اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه (متناهی یا نامتناهی) به صورت درست و نادرست یا زدن مثال نیز می‌تواند در آزمون مطرح شود.
- حالا تو حل کن:** سؤال‌های ۲۶ تا ۴۳

سؤال‌های امتحانی

سؤال‌هایی که علامت دارند، سخت‌ترین سؤال‌های هر بخش، اگر به کم‌تر از ۲۰ راضی نمی‌شوی، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگر، برو سراغ اون‌ها.

(مشابه کتاب درسی)

● در جای خالی یکی از مجموعه‌های $\emptyset, N, W, Z, Q', Q, R$ را قرار دهید.

- | | | |
|------------------------|-----------------------|------------------------|
| $Z \cup Q = \dots$ -۳ | $W \cap N = \dots$ -۲ | $N \cup Z = \dots$ -۱ |
| $Z - Q = \dots$ -۶ | $R - Q' = \dots$ -۵ | $Q \cap Q' = \dots$ -۴ |
| $Q' \cap R = \dots$ -۹ | $Q' - R = \dots$ -۸ | $Z - Q' = \dots$ -۷ |

(مشابه کتاب درسی)

● درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

- | | | |
|-----------------------------|--|----------------------------------|
| $3 \in (0, 3)$ -۱۲ | $-1 \in \{-2, 0\}$ -۱۱ | $3 \in \{0, 3\}$ -۱۰ |
| $\emptyset \in (-5, 0]$ -۱۵ | $(-1, 2) \subseteq [-1, 2)$ -۱۴ | $-1 \in (-2, 0)$ -۱۳ |
| $(2, 3] = [2, 3)$ -۱۸ | $\frac{\sqrt{5}}{3} \notin [0, 1]$ -۱۷ | $\emptyset \subseteq (0, 1)$ -۱۶ |

(مشابه کتاب درسی)

● ۱۹- مشخص کنید هر عدد متعلق به کدام بازه است. (مانند نمونه)

- | | | | | | |
|--------------------|------------|-----------------------|-------------------------|--------------|------------|
| -3 نمونه: | $\sqrt{8}$ | $\frac{\sqrt{11}}{2}$ | 0.075×10^{100} | $(-10)^{-2}$ | -10^{20} |
| ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 1, 2) | (0, 1) | (-5, -3] | (-∞, -100) | (√7, 3] | (4, +∞) |

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
.....	$(-3, 2]$
.....	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

در هر قسمت $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ و $B - A$ را به دست آورده و در صورت امکان با بازه‌ها نمایش دهید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۲۲- $B = [1, +\infty)$, $A = (-2, 0)$

۲۱- $B = (0, 5)$, $A = [-2, 1)$

۲۴- $B = (0, 1)$, $A = [-3, 1]$

۲۳- $B = [-1, 1]$, $A = (-2, 2)$

۲۵- مجموعه‌های $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{1, -1\}$ و $\mathbb{R} - (-1, 1)$ را روی محور نمایش داده و سپس آن‌ها را به صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

(مشابه کتاب درسی)

متناهی یا نامتناهی بودن هر مجموعه را مشخص کنید.

۲۷- مجموعه سلول‌های زنده بدن شما

۲۶- مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۱۰۰

۲۹- اعداد بازه $(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$

۲۸- مجموعه همه دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات

۳۱- اعداد حسابی منفی

۳۰- اعداد گویای بین ۱ و ۲

۳۳- مجموعه اعداد طبیعی که مربع آن‌ها از ۱۰ بیشتر است.

۳۲- مجموعه اعداد اول چهاررقمی

۳۵- مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۰۰

۳۴- مجموعه اعداد اعشاری بین $0/2$ و $0/5$

(مشابه کتاب درسی)

در هر قسمت دو مجموعه A و B مثال بزنید که شرایط خواسته شده را دارا باشد.

۳۶- A و B نامتناهی بوده ولی اشتراک آن‌ها متناهی باشد.

۳۷- A و B نامتناهی بوده ولی $A - B$ متناهی و $B - A$ نامتناهی باشد.

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۳۸- اجتماع دو مجموعه متناهی، متناهی است.

۳۹- اشتراک دو مجموعه نامتناهی، نامتناهی است.

۴۰- اگر $A \subseteq B$ بوده و B متناهی باشد، A هم متناهی است.

۴۱- اگر $A \subseteq B$ بوده و A نامتناهی باشد، B هم نامتناهی است.

۴۲- اگر $A - B$ نامتناهی باشد، A نامتناهی و B حتماً متناهی است.

۴۳- اگر $B - A$ متناهی باشد، B متناهی است.

۴۴- اگر $\frac{m-2}{3} \in [2, 6]$ باشد، m برابر با چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

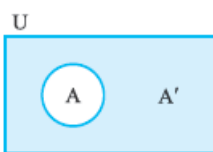
۴۵- اگر $(b, 3] \cap [-2, a) = (-\frac{2}{3}, 0)$ باشد، حاصل $(a, -b] \cup (-3a, 2b + 3)$ را به دست آورید.

نادرست	درست	(مشابه کتاب درسی)
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	

۲ متهم یک مجموعه - شمارش تعداد عضوهای مجموعه‌ها

مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند را مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم. مجموعه مرجع، معمولاً توسط خود مسئله مشخص می‌گردد.



متمم مجموعه A: فرض کنید U مجموعه مرجع و $A \subseteq U$ باشد. مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را

با نماد A' نشان می‌دهیم. (A' شامل عضوهایی از مجموعه مرجع است که در A نیستند.)

نکته

روابط زیر همواره در مجموعه U برقرار است:

$$U' = \emptyset \quad \emptyset' = U \quad (A')' = A \quad A \cup A' = U \quad A \cap A' = \emptyset$$

مثال: اگر $U = \mathbb{N}$ و $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، مجموعه A' را به دست آورید.

$$A' = U - A = \mathbb{N} - A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7, \dots\}$$

پاسخ:

مثال: در مثال بالا، اگر $U = \mathbb{Z}$ باشد، مجموعه A' را به دست آورید.

$$A' = U - A = \mathbb{Z} - A = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{\dots, -2, -1, 0, 5, 6, 7, \dots\}$$

پاسخ:

مثال: در مثال اول، اگر $U = \mathbb{R}$ باشد، مجموعه A' را به دست آورید.

پاسخ: از کل محور، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ را حذف می‌کنیم:

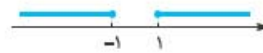


$$A' = U - A = \mathbb{R} - \{1, 2, 3, 4\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$$

می‌بینید با این‌که در هر سه مثال، مجموعه A یکسان است ولی چون مجموعه‌های مرجع، در هر کدام متفاوت است، مجموعه‌های مختلفی برای A' به دست می‌آید. به همین دلیل است که وقتی صحبت از متمم مجموعه می‌شود، حتماً باید مجموعه مرجع داده شده باشد.

مثال: فرض کنید $U = \mathbb{R}$ ، $A = (-1, 1)$ و $B = [2, +\infty)$ باشد. مجموعه‌های A' و B' و $(A \cup B)'$ را به دست آورید.

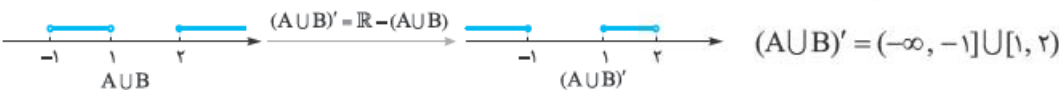
$$A' = U - A = \mathbb{R} - (-1, 1) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



پاسخ:

بازه $(-1, 1)$ را از کل \mathbb{R} برمی‌داریم

$$B' = U - B = \mathbb{R} - [2, +\infty) = (-\infty, 2)$$



روابط بین متمم مجموعه‌ها

در حالت کلی روابط مهمی بین متمم‌های دو مجموعه و اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل وجود دارد که آن‌ها را در جدول می‌بینید. درستی هر کدام را با نمودار ون یا مثال، بهتر می‌توانید درک کنید.

اسم قانون	قانون	توضیح	مثال
تفاضل به اشتراک	$A - B = A \cap B'$	تفاضل به اشتراک تبدیل شده و دومی متمم می‌شود.	$A - B' = A \cap (B')' = A \cap B$
دمورگان	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$	هر دو مجموعه متمم شده و علامت وسط برعکس می‌شود.	$(A \cup B)' = A' \cap B$
تفاضل مجموعه از متمم خودش	$A - A' = A$ $A' - A = A'$	چون A' و A جدا از هم هستند، تفاضل آن‌ها همان مجموعه اول می‌شود.	-

مثال: مجموعه مرجع را $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ در نظر گرفته و $A = \{2, 3, 5\}$ و $B = \{3, 5, 7, 8\}$ تعریف می‌کنیم. درستی رابطه

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

را بررسی کنید.

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های راست و چپ تساوی را جداگانه به دست می‌آوریم:

$$A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 8\} \Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{1, 4, 6, 9, 10\}$$

$$A' = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}, B' = \{1, 2, 4, 6, 9, 10\} \Rightarrow A' \cap B' = \{1, 4, 6, 9, 10\}$$

مثال: ساده‌شده مجموعه $(A \cup B) \cap (A' \cap B')$ را به دست آورید.

$$\underbrace{(A \cup B)}_X \cap \underbrace{(A' \cap B')}_{X'} = X \cap X' = \emptyset$$

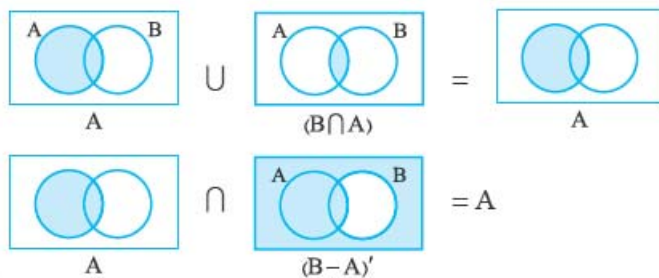
پاسخ: طبق قانون دمورگان $A' \cap B' = (A \cup B)'$ پس داریم:

نکته

برای ساده‌سازی عبارات مجموعه‌ای می‌توانیم از نمودار ون هم کمک بگیریم.

مثال: حاصل مجموعه $[A \cup (B \cap A)] \cap (B - A)'$ را به دست آورید.

پاسخ:



حالا داریم:

تعداد عضوهای اجتماع، تفاضل و متمم مجموعه‌ها

به دو روش می‌توانیم تعداد عضوهای مجموعه‌ها را به دست آوریم: (۱) روش فرمولی (۲) روش نمودار ون

روش فرمول

۱ **تعداد عضوهای $A \cup B$:** اگر تعداد اعضای A را با تعداد اعضای B جمع کنیم، عضوهای تکراری دو بار شمرده می‌شوند (در صورتی که عضوهای تکراری تو $A \cup B$ رو به بار می‌نویسیم)، پس یک بار آن را کم می‌کنیم، بنابراین:

$$\underbrace{n(A \cup B)}_{\text{تعداد عضوهایی که در } A \text{ یا } B \text{ هستند}} = \underbrace{n(A)}_{\text{تعداد } A} + \underbrace{n(B)}_{\text{تعداد } B} - \underbrace{n(A \cap B)}_{\text{تعداد عضوهایی که در هر دوی } A, B \text{ هستند}}$$

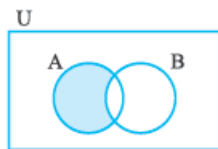
نکته

A و B را دو مجموعه جدا از هم یا مجزا گوئیم هرگاه اشتراکی نداشته باشند؛ به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$. رابطه بالا در این حالت به صورت مقابل درمی‌آید.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \underbrace{n(\emptyset)}_{\text{صفر}} = n(A) + n(B)$$

نتیجه: اگر دو مجموعه جدا از هم باشند، برای به دست آوردن تعداد عضوهای اجتماع، تعداد عضوهای دو مجموعه را با هم جمع می‌کنیم.

۲ **تعداد عضوهای $A - B$:** شکل زیر نمایش نمودار ون $A - B$ است. برای به دست آوردن تعداد عضوهای این مجموعه، کافی است تعداد عضوهای مشترک را از تعداد اعضای A کم کنیم.



$$\underbrace{n(A - B)}_{\text{تعداد عضوهایی که در } A \text{ هستند ولی در } B \text{ نیستند (فقط } A)} = \underbrace{n(A)}_{\text{مجموعه اول } n} - \underbrace{n(A \cap B)}_{\text{اشتراک } n}$$

به عبارت دیگر:

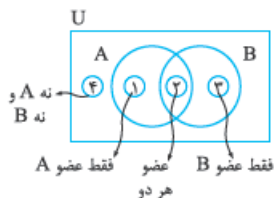
$$\underbrace{n(A')}_{\text{تعداد عضوهایی که در } A \text{ نیستند}} = \underbrace{n(U)}_{\text{تعداد مرجع}} - n(A)$$

۳ **تعداد عضوهای متمم:**

برای به دست آوردن تعداد عضوها، هم می‌توانید از این روابط مهم استفاده کنید یا این که از نمودار ون کمک بگیرید.

روش نمودار ون

در این روش، نموداری به صورت مقابل رسم می‌کنیم:



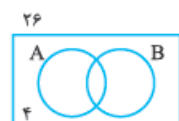
۱ اگر اشتراک داده شده باشد، اول آن را قرار می‌دهیم، در غیر این صورت آن را x می‌گیریم.

۲ با کم کردن اشتراک از تعداد عضوهای A ، ناحیه (۱) را به دست می‌آوریم. (شبهه همین ناحیه (۳))

۳ مجموع تعداد عضوهایی که در ۴ ناحیه قرار دارد، برابر مجموعه مرجع می‌شود که از حل معادله، مجهول به دست می‌آید.

مثال: در یک کلاس ۲۶ نفره که ۲۰ نفر علاقه‌مند به فوتبال، ۱۲ نفر علاقه‌مند به والیبال و ۴ نفر علاقه‌مند به هیچ کدام نیستند، برای

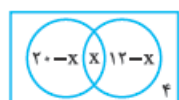
محاسبه علاقه‌مندان به هر دو رشته داریم:



پاسخ: روش اول: $26 - 4 = 22$ درون دایره‌ها هستند.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$22 = 20 + 12 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$



روش دوم: اشتراک را x می‌گیریم. مجموع اعضای تمام نواحی برابر ۲۶ می‌شود:

$$20 - x + x + 12 - x + 4 = 26 \Rightarrow x = 10$$

مثال: در یک کلاس ۳۰ نفره، ۸ نفر عضو تیم والیبال، ۱۴ نفر عضو تیم فوتبال و ۳ نفر هم عضو هر دو تیم هستند.

الف) چند نفر عضو تیم والیبال یا فوتبال هستند؟ (به عبارت دیگر، چند نفر عضو حداقل یکی از تیم‌ها هستند؟)

پاسخ: V و F را به ترتیب مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم والیبال و فوتبال تعریف می‌کنیم:

$$n(V \cup F) = n(V) + n(F) - n(V \cap F) = 8 + 14 - 3 = 19$$

بنابراین ۱۹ نفر، عضو حداقل یکی از تیم‌های فوتبال یا والیبال هستند (حالا فوتبال یا والیبال یا هر دو)

ب) چند نفر عضو تیم فوتبال بوده ولی عضو تیم والیبال نیستند؟

پاسخ: ۱۱ نفر فقط فوتبالی هستند.

$$n(F \cap V') = n(F - V) = n(F) - n(F \cap V) = 14 - 3 = 11$$

پ) چند نفر عضو تیم والیبال هستند ولی عضو تیم فوتبال نیستند؟

پاسخ: ۵ نفر فقط والیبالی هستند.

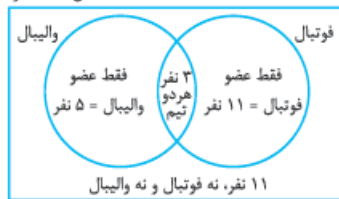
$$n(V \cap F') = n(V - F) = n(V) - n(V \cap F) = 8 - 3 = 5$$

ت) چند نفر عضو هیچ کدام از تیم‌ها نیستند؟

پاسخ: روش اول: طبق قسمت الف، ۱۹ نفر فوتبالی یا والیبالی هستند. کلاس ۳۰ دانش‌آموز دارد، بنابراین $30 - 19 = 11$ نفر، نه عضو

فوتبال و نه عضو والیبال هستند. طبق توضیحات پله دوم این تعداد همان $n(V \cup F)$ یا $n(V' \cap F')$ خواهند بود.

کلاس = ۳۰ نفر



روش دوم: از نمودار ون استفاده می‌کنیم. شکلی به صورت مقابل رسم می‌کنیم. اول ۳

نفر را در قسمت اشتراک می‌نویسیم. کل والیبالی‌ها ۸ نفر بودند، پس $8 - 3 = 5$ نفر فقط

عضو والیبال هستند. به همین صورت $14 - 3 = 11$ نفر هم فقط عضو فوتبال هستند. حالا

$5 + 3 + 11 = 19$ نفر بالآخره عضو حداقل یکی از تیم‌ها و بنابراین $30 - 19 = 11$ نفر عضو

هیچ تیمی نیستند.

مثال: در یک هتل، ۳۸ مسافر وجود دارد. ۲۰ نفر آنان تاجر و ۱۷ نفر جهانگرد هستند. اگر ۷ نفر نه تاجر و نه جهانگرد باشند، چند

مسافر تاجر جهانگرد در هتل وجود دارد؟

پاسخ: روش اول: از ۳۸ مسافر، ۷ نفر نه تاجر و نه جهانگرد هستند، پس $38 - 7 = 31$ نفر بالآخره تاجر هستند یا جهانگرد. مجموعه

تاجران و جهانگردان را به ترتیب T و G در نظر می‌گیریم:

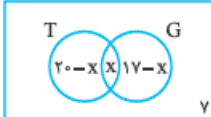
$$n(T \cup G) = n(T) + n(G) - n(T \cap G) \Rightarrow 31 = 20 + 17 - n(T \cap G) \Rightarrow n(T \cap G) = 6$$

تاجریا جهانگرد

تاجرو جهانگرد

روش دوم: از نمودار ون کمک می‌گیریم. اول اشتراک اما چون آن را نداریم $n(T \cap G) = x$ می‌گیریم.

هتل = ۳۸ نفر



$n(T) = 20$ ، پس تعداد افرادی که فقط تاجرند $20 - x$ خواهد بود. به همین صورت افرادی که فقط جهانگرد

هستند $17 - x$ نفر خواهند بود. در داخل دایره‌ها $20 - x + x + 17 - x$ نفر وجود دارد. به شکل دیگری

می‌توان گفت داخل دایره‌ها $31 - 7 = 38 - 7 = 31$ نفر وجود دارد، پس:

$$20 - x + x + 17 - x = 31 \Rightarrow 37 - x = 31 \Rightarrow x = 6$$

مثال: در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعه چای و نه شالیزار دارند، برابر

تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می‌کنند.) (تجربی دی ۱۳۰۰)

پاسخ: بهتر است به جای درگیر شدن با فرمول‌ها از نمودار ون استفاده کنیم:

۵۰۰



فقط شالیزار

فقط شالیزار را x می‌گیریم، پس بیرون دایره‌ها (نه چای و نه شالیزار) نیز x می‌شود:

$$370 + x + x = 500 \Rightarrow 2x = 130 \Rightarrow x = 65 \Rightarrow \text{مشترک} = 200 - x = 200 - 65 = 135$$

هیچ کدام

$$\Rightarrow \text{فقط چای} = 370 - 135 = 235$$

در امتحان چه خبر؟

نویس ۱: مجموعه A و مجموعه مرجع داده می‌شود و شما باید A' را به دست آورید. حواستان به باز یا بسته بودن بازه‌های داده شده باشد.

حالاتوکل کن: سؤال‌های ۴۶ تا ۷۲

نویس ۲: مجموعه مرجع و دو مجموعه که ویژگی خاصی دارند داده می‌شود. باید از روی تعداد عضوهای داده شده تعداد عضوهای

خواسته شده را به دست آورید. روش نمودار ون معمولاً بهتر از فرمول جواب می‌دهد. حواستان اول به اشتراک دو مجموعه باشد.

حالاتوکل کن: سؤال‌های ۷۳ تا ۸۱

نویس ۳: تعداد عضوهای برخی از مجموعه‌ها داده شده و شما باید با استفاده از فرمول‌ها تعداد عضوهای مجموعه‌های خواسته شده را پیدا کنید.

حالاتوکل کن: سؤال‌های ۸۲ تا ۸۴

سؤال‌های امتحانی



(مشابه کتاب درسی)

$$U \cup A = \dots - ۴۸$$

$$A \cap A' = \dots - ۴۷$$

$$A \cup A' = \dots - ۴۶$$

$$A - U = \dots - ۵۱$$

$$U - A = \dots - ۵۰$$

$$U \cap A = \dots - ۴۹$$

$$\emptyset' = \dots - ۵۲$$

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

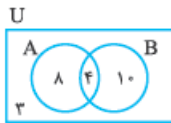
۵۳- نمایش نمودار $(A - B)'$ به صورت مقابل است:



۵۴- متمم مجموعه $\{2, 3, 5\}$ نسبت به اعداد طبیعی یک‌رقمی ۶ عضو دارد.

$$(A - B)' = A' \cup B - ۵۵$$

۵۶- در شکل مقابل تعداد عضوهایی که فقط در یکی از مجموعه‌ها هستند، برابر ۱۸ است.



۶۰- فرض کنید مجموعه $A = \{0, 1, 2\}$ باشد. متمم مجموعه A را نسبت به هر کدام از مجموعه‌های مرجع داده‌شده به دست آورید.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

$$U = [0, 2] - ۵۹$$

$$U = \mathbb{Z} - ۵۸$$

$$U = \{-5, -4, \dots, 5\} - ۵۷$$

$$U = \mathbb{R} - ۶۱$$

$$U = (-1, 4] - ۶۰$$

۶۲- فرض کنید $U = \mathbb{R}$ باشد. متمم مجموعه‌های Q, Z, W, N و Q' را مشخص کرده و در صورت امکان با بازه‌ها نمایش دهید.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۶۳- فرض کنید $U = [-3, 3]$ باشد. متمم مجموعه‌های $(-3, 0), [-3, 1), (-3, 1), (-3, 2), (0, 1)$ را به دست آورید.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۶۴- فرض کنید $U = \mathbb{R}$ ، $A = (-\infty, 1]$ و $B = (2, +\infty)$ باشد. مجموعه‌های $A', B', A' \cap B', (A \cap B)', (A - B)'$ را به دست آورید.

۶۵- اگر $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ ، مجموعه مضارب ۲ برابر A و مجموعه مضارب ۳ برابر B باشد، با تکمیل جدول درستی هر یک از رابطه‌های زیر را نشان دهید.

A'	B'	$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$	نتیجه
					-۶۶

A	A'	$(A')'$	نتیجه
			$A = (A')'$

B'	$A - B$	$A \cap B'$	$A - (A \cap B)$	نتیجه
				-۶۸

A'	B'	$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$	نتیجه
					-۶۷

(مشابه کتاب درسی)

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. (U مجموعه مرجع است.)

۷۰- اگر U نامتناهی و A متناهی باشد، آن‌گاه A' نامتناهی است.

۶۹- متمم مجموعه متناهی، همواره نامتناهی است.

۷۲- $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B' \subseteq A'$.

۷۱- اگر U نامتناهی و A نامتناهی باشد، آن‌گاه A' متناهی است.

۷۳- در یک نمایشگاه ماشین ۵۰ اتومبیل وجود دارد. ۱۷ ماشین ترمز ABS و ۳۰ ماشین، فرمان هیدرولیک دارند. اگر ۶ ماشین هم ترمز ABS و هم فرمان هیدرولیک داشته باشند،

الف) چند ماشین حداقل یکی از دو امکانات را دارند؟

ب) چند ماشین نه ترمز ABS و نه فرمان هیدرولیک دارند؟

۷۴- در یک همایش ۱۲۰ نفر شرکت کرده‌اند. ۴۳ نفر از آنان، عضو هیچ شبکه اجتماعی نیستند، در حالی که ۷۰ نفر عضو شبکه اجتماعی A و ۳۰ نفر عضو هر دو شبکه اجتماعی A و B هستند. چند نفر عضو شبکه اجتماعی B هستند؟

(مشابه کتاب درسی)

۷۵- در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟

(کنکور ریاضی ۹۸)

در یکی از مدارس استان خراسان رضوی، ۱۲ نفر عضو تیم المپیاد ریاضی و ۹ نفر عضو تیم المپیاد فیزیک هستند. اگر ۳ نفر عضو هر دو تیم المپیاد باشند و ۷۵ نفر هم عضو هیچ‌کدام از تیم‌ها نباشند،

(مشابه کتاب درسی)

۷۶- چند نفر فقط عضو المپیاد ریاضی هستند؟

۷۶- این مدرسه چند دانش‌آموز دارد؟

۷۹- چند نفر عضو فقط یکی از تیم‌ها هستند؟

۷۸- چند نفر فقط عضو المپیاد فیزیک هستند؟

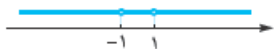
۸۰- چند نفر عضو تیم ریاضی نیستند؟

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل اول	رشته: ریاضی و تجربی	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.om	نمره
۱	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. الف) $(-2, 3) \in 2$ ب) دنباله $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, \dots$ یک دنباله هندسی است. پ) اگر مجموعه C دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آن گاه C حتماً یک مجموعه نامتناهی است. ت) اگر \mathbb{Z} مجموعه مرجع باشد، آن گاه $(\mathbb{Z} - \mathbb{W})' = \mathbb{N}$ است.				۱
۲	جای خالی را با عبارتهای مناسب تکمیل کنید. الف) $(-\infty, 5) - (-1, 5) - [1, 5]$ مجموعه‌ای است (متناهی یا نامتناهی). ب) حاصل $(\mathbb{Q} - \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c - \mathbb{Q})$ برابر است با مجموعه پ) متمم مجموعه $\{0\} - [-2, 1]$ روی محور اعداد حقیقی به صورت می‌باشد. ت) اگر A نامتناهی و B متناهی باشد، آن گاه مجموعه $B - A$ مجموعه‌ای است.				۲
۳	اگر حاصل $[0, 2] - [-6, 4] \cap (-\infty, 1]$ به صورت بازه $[a, b]$ باشد، حاصل $a - b$ را به دست آورید. (نوشتن مراحل لازم است).				۱
۴	حاصل متمم $(A - B)' - [A' \cap (A' \cup B)]$ ، نسبت به مجموعه مرجع را به دست آورید.				۱
۵	در یک مدرسه ۱۲۲ نفری، ۸۲ نفر ساعت در دست دارند و ۷۹ نفر عینک می‌زنند و ۵۴ نفر هم عینک می‌زنند و هم ساعت در دست دارند. چند نفر: الف) حداقل یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟ ب) فقط ساعت در دست دارند؟ پ) دقیقاً یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟ ت) نه ساعت می‌بندند و نه عینک می‌زنند؟				۱
۶	فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشد به طوری که $n(U) = 120$ ، $n(A) = 75$ ، $n(B) = 50$ و $n(A \cap B) = 35$ مطلوب است: الف) $n(A \cup B)$ ب) $n(A \cap B')$ پ) $n(A' \cap B)$ ت) $n(A' \cap B')$				۲
۷	با توجه به الگوی مقابل تعداد دایره‌ها در شکل یازدهم چه قدر است؟				۱/۵
۸	در الگوی مقابل: الف) الگوی مربع‌های سیاه را بنویسید. ب) الگوی مربع‌های سفید را بنویسید. پ) وقتی کل مربع‌ها برابر ۱۰۶ تا باشد، تعداد مربع‌های سفید چه قدر است؟				۱/۵
۹	شش جمله اول از دنباله بازگشتی با اطلاعات زیر را بنویسید. $F_1 = 1$ ، $F_2 = 1$ ، $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$				۱
۱۰	برای دنباله زیر جمله عمومی را بنویسید. $5, 12, 22, 35, 51, \dots$				۱
۱۱	در یک دنباله حسابی اگر $a_8 - a_4 = 20$ و قدرنسبت ۴ باشد، دنباله را مشخص کنید.				۱
۱۲	واسطه حسابی دو عدد $\sqrt{8}$ و $\sqrt{128}$ چند برابر واسطه مثبت هندسی آنهاست؟				۱
۱۳	جمله عمومی یک دنباله هندسی $a_n = \frac{3}{2 \times 3^n}$ است. قدرنسبت آن را پیدا کنید.				۱
۱۴	در یک دنباله هندسی، مجموع معکوس جملات هفتم و نهم برابر ۵ و حاصل ضرب جملات پنجم و یازدهم برابر $\frac{1}{9}$ می‌باشد. جمله اول و قدرنسبت مثبت دنباله چه قدر است؟				۱/۵
۱۵	بین دو عدد ۸۱ و ۶۲۵ سه عدد مثبت چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند.				۱
۱۶	سه عدد تشکیل دنباله حسابی داده‌اند. اگر مجموع آنها ۱۵ و مجموع مربعاتشان ۱۰۷ باشد، آن سه عدد را بیابید.				۱/۵
	جمع نمرات				۲۰

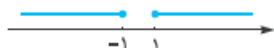
پاسخ سؤال‌های امتحانی



$$\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$



$$\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$



$$\mathbb{R} - (-1, 1) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

از کل \mathbb{R} بازه $(-1, 1)$ را حذف می‌کنیم. چون بازه، باز است، ۱ و -۱ حذف نمی‌شوند.

۲۷- متناهی

۲۶- نامتناهی

۲۸- نامتناهی

۲۹- نامتناهی

۳۰- متناهی (برابر \emptyset است)

۳۱- نامتناهی

۳۲- متناهی $(\{4, 5, 6, \dots\})$

۳۳- نامتناهی

۳۴- متناهی

۳۵- نامتناهی

۳۶- $A = \{\dots, -2, -1, 0\}$, $B = \{0, 1, 2, \dots\} \Rightarrow A \cap B = \{0\}$

۳۷- $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$

$\Rightarrow A - B = \emptyset$, $B - A = \{\dots, -2, -1, 0\}$

۳۸- درست

۳۹- اشتراک دو مجموعه نامتناهی می‌تواند متناهی هم باشد (مثل ۳۶). پس نادرست است.

۴۰- وقتی مجموعه بزرگ‌تر (یعنی B) متناهی باشد، زیرمجموعه‌های آن نیز متناهی هستند، پس درست است.

۴۱- همه اعضای A را هم دارد، چون A نامتناهی است، پس B هم نامتناهی می‌شود، پس درست است.

۴۲- ممکن است B نامتناهی هم باشد، پس نادرست است.

۴۳- ممکن است B نامتناهی باشد ولی $B - A$ متناهی شود، پس نادرست است. (سعی کن برای فوریت مثال بزنی).

۴۴- $\frac{m-2}{3} \in [2, 6)$ یعنی $\frac{m-2}{3} < 6$ و $\frac{m-2}{3} \geq 2$. حالا باید محدوده m

را به دست آوریم. اول همه عبارت‌ها را در ۳ ضرب می‌کنیم، بعد هم با ۲+ جمع می‌کنیم، ببینید:

$$2 \leq \frac{m-2}{3} < 6 \xrightarrow{+2} 8 \leq m < 18 \xrightarrow{+2} 10 \leq m < 20$$

$$\Rightarrow m \in [10, 20)$$

پس m برابر با اعداد صحیح ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸ (یعنی ۱۲ عدد صحیح) می‌تواند باشد.

۴۵- به شکل زیر دقت کنید. $a < b$ نمی‌تواند باشد چون اشتراک دو بازه تهی می‌شود. از طرفی $b < -2$ هم نمی‌تواند باشد، چون آن وقت اشتراک را از -۲ باید شروع کرد؛ پس چاره‌ای جز این که $a < b < -2$ باشد، نمی‌ماند. شبیه همین استدلال $a < 3$ باید باشد (که $a \geq 3$ باشد، اشتراک تا ۳ میره نه صفر!). خلاصه این که اشتراک دو بازه داده شده برابر (b, a) می‌شود؛ پس

می‌فهمیم که $a = 0$ و $b = -\frac{2}{3}$ باید باشد. با جای‌گذاری داریم:

$$(a, -b] \cup (-3a, 2b + 3) = (0, \frac{2}{3}] \cup (0, \frac{5}{3}) = (0, \frac{5}{3})$$

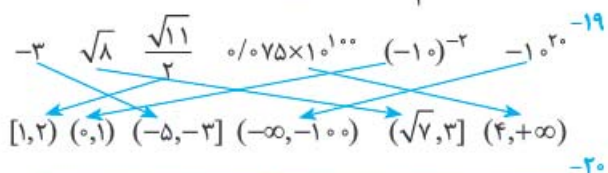
اگر $A \subseteq B$ باشد $A - B = \emptyset$ و $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ می‌شود. با توجه به رابطه زیرمجموعه بین مجموعه‌های مهم داریم:

- ۲- \mathbb{N}
- ۳- \mathbb{Q}
- ۴- \emptyset
- ۵- \mathbb{Q}
- ۶- \emptyset
- ۷- \mathbb{Z}
- ۸- \emptyset
- ۹- \mathbb{Q}'
- ۱۰- درست
- ۱۱- نادرست
- ۱۲- نادرست
- ۱۳- درست
- ۱۴- درست
- ۱۵- نادرست

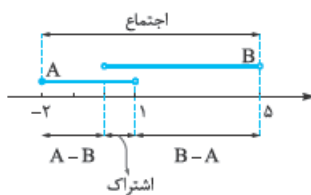
۱۶- درست (\emptyset زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست)

۱۷- نادرست ($\frac{\sqrt{5}}{3} < 1$)

۱۸- نادرست



نمایش هندسی و مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$	$(-3, 2]$	نیم باز
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$	$(-1, +\infty)$	باز بی کران
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$	$(-\infty, 4]$	نیم باز بی کران



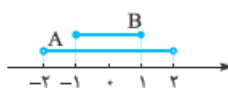
۲۱- $A \cup B = [-2, 5)$, $A \cap B = (0, 1)$

$A - B = [-2, 0]$, $B - A = [1, 5)$



۲۲- $A \cup B = (-2, 0) \cup [1, +\infty)$, $A \cap B = \emptyset$

$A - B = A = (-2, 0)$, $B - A = B = [1, +\infty)$



۲۳- $A \cup B = A = (-2, 2)$, $A \cap B = B = [-1, 1]$

$A - B = (-2, -1) \cup (1, 2)$, $B - A = \emptyset$



۲۴- $A \cup B = A = [-3, 1]$, $A \cap B = B = (0, 1)$

$A - B = [-3, 0] \cup \{1\}$, $B - A = \emptyset$

● با استفاده از نمودار ون درمی‌یابیم که:

$$U - A = \emptyset \quad -46$$

$$A \subseteq U \quad -48 \quad (A \subseteq U \text{ چون } U)$$

$$A' = \emptyset \quad -50$$

$$\emptyset \quad -51 \quad (\text{چون هر چیزی تو } A \text{ هست تو } U \text{ هست})$$

$$\emptyset' = U - \emptyset = U \quad -52$$

-53 نادرست است؛ نمایش نمودار $(A - B)'$ به صورت زیر است:



$$-54 \text{ درست است: } \{1, 2, 3, \dots, 9\} - \{2, 3, 5\} = \{1, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

$$-55 \text{ درست است: } (A - B)' = (A \cap B)' = A' \cup B$$

$$-56 \text{ درست است چون } 8 + 10 = 18 \quad (A - B) \cup (B - A)$$

$$-57 \quad A' = U - A = \{-5, -4, \dots, 5\} - \{0, 1, 2\}$$

$$= \{-5, -4, -3, -2, -1, 3, 4, 5\}$$

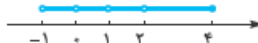
$$-58 \quad A' = U - A = \mathbb{Z} - \{0, 1, 2\} = \{\dots, -2, -1, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$-59 \quad A' = U - A = [0, 2] - \{0, 1, 2\} = (0, 1) \cup (1, 2)$$



$$-60 \quad A' = U - A = (-1, 4] - \{0, 1, 2\}$$

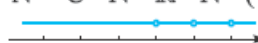
$$= (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 4]$$



$$-61 \quad A' = U - A = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$$

$$= (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$-62 \quad N' = U - N = \mathbb{R} - N = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup \dots$$



$$W' = U - W = \mathbb{R} - W = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \dots$$



$$Z' = U - Z = \mathbb{R} - Z$$

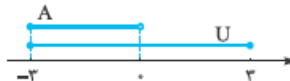
$$= \dots \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \dots$$



$$Q' = U - Q = \mathbb{R} - Q = Q', \quad (Q')'$$

$$= U - Q' = \mathbb{R} - Q' = Q$$

-63



$$A = [-3, 0)$$

$$A' = U - A = [0, 3]$$

$$B' = U - B = \{-3\} \cup [1, 3]$$

$$B = (-3, 1)$$



$$C' = U - C = \{-3, 2\} \quad (\text{فقط دو تا عدد می‌شه})$$

$$C = (-3, 2)$$



$$D' = U - D = [-3, 0] \cup [1, 2]$$

$$D = (0, 1)$$



-64

(اول A' و B' بعد اشتراک اون‌ها) $A' = (1, +\infty)$, $B' = (-\infty, 2]$

$$A' \cap B' = (1, +\infty) \cap (-\infty, 2] = (1, 2]$$

(اول $A \cap B$ بعد متمم) $(A \cap B)' = (\emptyset)' = \mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R}$

$$A - B = A \Rightarrow (A - B)' = A' = (1, +\infty)$$

● $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ و $B = \{3, 6, 9\}$. توجه دارید که A و B باید زیرمجموعه مجموعه مرجع باشند.

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$	A	-65
$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	A'	
$\{2, 4, 6, 8, 10\}$	(A')	
$(A)' = A$	نتیجه	

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	A'	-66
$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$	B'	
$\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$	$A \cup B$	
$\{1, 5, 7\}$	$(A \cup B)'$	
$\{1, 5, 7\}$	$A' \cap B'$	
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	نتیجه	

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	A'	-67
$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$	B'	
$\{6\}$	$A \cap B$	
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$	$(A \cap B)'$	
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$	$A' \cup B'$	
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	نتیجه	

$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$	B'	-68
$\{2, 4, 8, 10\}$	$A - B$	
$\{2, 4, 8, 10\}$	$A \cap B'$	
$\{2, 4, 8, 10\}$	$A - (A \cap B)$	
$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$	نتیجه	

-69 بستگی به مجموعه مرجع دارد. اگر U نامتناهی باشد، متمم

مجموعه متناهی، نامتناهی می‌شود، اما اگر U متناهی باشد، متمم

مجموعه متناهی، متناهی است، پس در حالت کلی نادرست است.

-70 با توجه به توضیحات الف درست است.

-71 نادرست است. ممکن است A و A' هر دو نامتناهی باشند. مثلاً

اگر $U = \mathbb{Z}$ و $A = \mathbb{N}$ باشد، A' هم نامتناهی است.

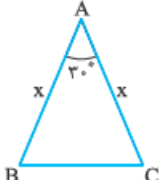
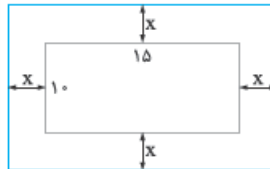
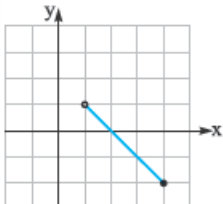
-72 در نمودار ون مقابل، $A \subseteq B$ است. A' شامل مجموعه متناهی، متناهی می‌شود، اما اگر U متناهی باشد، متمم

مجموعه متناهی، متناهی است، پس $B' \subseteq A'$ درست خواهد بود.

-73 الف) $n(A \cup H) = n(A) + n(H) - n(A \cap H)$

دارای ABS یا هیدرولیک $= 17 + 30 - 6 = 41$



ریاضی دهم		رشته: ریاضی و تجربی	نمونه امتحان نیم‌سال دوم
نمره	Kheilisabz.com	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	امتحان شماره ۶ - نهایی خرداد ۱۴۰۳
۱		درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A نیز متناهی خواهد بود. ب) اگر $0 < a < 1$ آن‌گاه $\sqrt{a} > \sqrt[3]{a}$. ج) رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی کم‌تر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد، تابع است. د) تعداد جایگشت‌های متمایز حروف کلمه «نرگس» برابر ۴! است.	۱
۱		جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) اگر زاویهٔ حتمی با جهت مثبت محور افقی 45° باشد، آن‌گاه شیب آن برابر است. ب) عبارت $\sqrt{\sqrt{81}}$ برابر با عدد صحیح است. ج) مجموعه جواب نامعادلهٔ $ x \leq 6$ بازهٔ است. د) تعداد تابع خطی وجود دارد که دامنهٔ آن $[0, 2]$ و برد آن $[-2, 1]$ باشد.	۲
۱		اگر $n(A) = 60$ ، $n(B) = 70$ و $n(A - B) = 15$ آن‌گاه $n(A \cup B)$ را به دست آورید.	۳
۰/۷۵		جمله‌های چهارم و هفتم یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب ۲۴ و ۱۹۲ است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.	۴
۰/۷۵		مساحت مثلث متساوی‌الساقین ABC برابر ۹ است. اندازهٔ x را به دست آورید.	۵
۱		اگر $27^\circ < \alpha < 36^\circ$ و $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$ ، نسبت‌های مثلثاتی $\cos \alpha$ و $\cot \alpha$ را به دست آورید.	۶
۱/۵		الف) صورت و مخرج کسر $\frac{x^2 + x}{x^2 - x - 2}$ را تجزیه و عبارت را ساده کنید. ب) مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$ را گویا کنید.	۷
۱/۵		یک عکس به ابعاد ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر x باشد، مقدار x را پیدا کنید.	۸
۱/۵		مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{-(x-4)^2}{2x+1} \geq 0$ را به دست آورید.	۹
۰/۷۵		در سهمی $y = ax^2 + 2x + 3$ خط $x = 2$ محور تقارن آن است. مقدار a را به دست آورید.	۱۰
۱/۲۵		تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 3 & x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کنید، $f(0)$ و $f(-4)$ را به دست آورید.	۱۱
۱/۵		دامنه و برد تابع خطی مقابل را بنویسید و ضابطهٔ آن را به دست آورید.	۱۲
۰/۷۵		ابتدا نمودار تابع $y = x $ را رسم کرده و با کمک انتقال آن، نمودار تابع $f(x) = x - 3 + 2$ را رسم کنید.	۱۳

ریاضی دهم		رشته: ریاضی و تجربی	نمونه امتحان نیمسال دوم	
نمره	Kheilisabz.com	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	امتحان شماره ۶ - نهایی خرداد ۱۴۰۳	ردیف
۱/۲۵		با ارقام ۲, ۳, ۴, ۷, چند عدد ۴رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟		۱۴
۱/۵		برای برگزاری یک دوره مسابقات ریاضی از بین ۴ دبیر، ۳ دانشجو و ۲ دانش آموز قرار است گروهی تشکیل شود. به چند طریق می توان این کار را انجام داد اگر: الف) گروه ۴ نفره باشد؟ ب) گروه ۵ نفره باشد و حداقل یک دبیر در آن باشد؟		۱۵
۱		دو تاس را با هم می اندازیم. پیشامد A را «هر دو تاس مضرب ۵ باشند.» و پیشامد B را «مجموع دو تاس ۱۱ باشد.» تعریف می کنیم: الف) A و B را با نمایش اعضا مشخص کنید. ب) آیا این دو پیشامد ناسازگارند؟ چرا؟		۱۶
۱		اگر ۶ نامزد انتخابات شورای مدرسه که دو نفر از آنها همکلاسی هستند به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چه قدر احتمال دارد که این دو همکلاسی کنار هم باشند؟		۱۷
۱		نوع متغیرهای زیر را از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی مشخص کنید. الف) میزان بارندگی برحسب سانتی متر در یک شهر ب) گروه خونی دانش آموزان یک کلاس		۱۸
۲۰		موفق باشید		

پاسخ‌نامه تشریحی امتحان شماره (۶)

الف) $\frac{x^2 + x}{x^2 - x - 2} = \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x}{x-2}$ (۰٫۷۵) -۷

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \times \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + 1}$ (۰٫۵)

$= \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$ (۰٫۷۵)

۸- روش اول: استفاده از روش کلی در حل معادله درجه ۲

$(10 + 2x)(15 + 2x) = 300$

$\Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$ (۰٫۷۵)

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \\ x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \quad (۰٫۷۵)$$

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = 4900 \quad (۰٫۷۵) \\ x_1 = \frac{5}{2} \quad (۰٫۷۵), x_2 = -15 \quad (۰٫۷۵) \end{cases}$
 قابل قبول $\frac{5}{2}$ (۰٫۷۵)

روش دوم: استفاده از تجزیه در حل معادله درجه ۲

$(10 + 2x)(15 + 2x) = 300$ (۰٫۷۵)

$\Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$ (۰٫۷۵)

$(2x + 30)(2x - 5) = 0$ (۰٫۷۵)

$\Rightarrow x = -15$ (۰٫۷۵), $x = \frac{5}{2}$ قابل قبول (۰٫۷۵)

$-(x-4)^2 = 0 \Rightarrow x = 4$ (۰٫۷۵) -۹

$2x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ (۰٫۷۵)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$	
$-(x-4)^2$	-	-	0	-	(۰٫۷۵)
$2x + 1$	-	0	+	+	(۰٫۷۵)
$\frac{-(x-4)^2}{2x+1}$	+	تعریف نشده	-	-	(۰٫۷۵)

مجموعه جواب $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \{4\}$ (۰٫۷۵)

۱۰- روش اول:

$x = \frac{-b}{2a} = 2$ (۰٫۷۵) $\Rightarrow x = \frac{-2}{2a} = 2$ (۰٫۷۵)

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ (۰٫۷۵)

$f(1) = f(2)$ (۰٫۷۵) $\Rightarrow a + 5 = 9a + 9$ (۰٫۷۵) روش دوم:

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ (۰٫۷۵)

۱- الف) درست (۰٫۷۵)

ج) نادرست (۰٫۷۵)

۲- الف) ۱ (۰٫۷۵)

ج) $[-6, 6]$ (۰٫۷۵)

۳- روش اول:

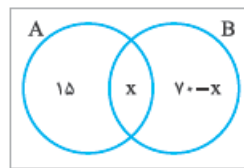
$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ (۰٫۷۵)

$\Rightarrow 15 = 60 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 45$ (۰٫۷۵)

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (۰٫۷۵)

$\Rightarrow n(A \cup B) = 60 + 70 - 45 = 85$ (۰٫۷۵)

روش دوم:



$60 = 15 + x \Rightarrow x = 45$ (۰٫۷۵)

$n(A \cup B) = 15 + 45 + (70 - 45) = 85$ (۰٫۷۵)

-۴

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_1 r^2}{t_1 r^3} = r^2 \Rightarrow r^3 = \frac{192}{24} = 8$ (۰٫۷۵) $\Rightarrow r = 2$ (۰٫۷۵)

$S = \frac{1}{2} x^2 \sin 30^\circ = 9$ (۰٫۷۵) -۵

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times x^2 \times \frac{1}{2} = 36 \xrightarrow{x>0} x = 6$ (۰٫۷۵)

۶- روش اول: استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ (۰٫۷۵)

$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$ (۰٫۷۵)

$\xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه چهارم}} \cos \alpha = +\frac{3}{5}$ (۰٫۷۵)

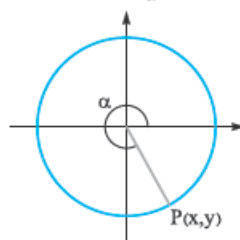
$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{3}{4}$ (۰٫۷۵)

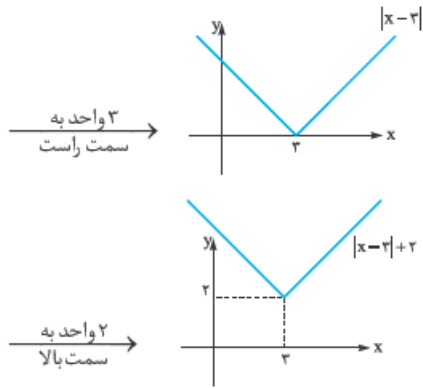
روش دوم: استفاده از دایره مثلثاتی

$\tan \alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x$ (۰٫۷۵)

$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$ (۰٫۷۵)

$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$ (۰٫۷۵), $\cot \alpha = -\frac{3}{4}$ (۰٫۷۵)





-۱۴

(۰/۵) $۲۴ = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ حالت اول که رقم سمت راست صفر باشد
 (۰/۵) $۳۶ = ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲$ حالت دوم که رقم سمت راست ۲ یا ۴ باشد
 (۰/۵) $\Rightarrow ۲۴ + ۳۶ = ۶۰$ تعداد کلی اعداد

(الف) (۰/۵) $\binom{۹}{۴} = \frac{۹!}{۴! \times ۵!} = ۱۲۶$ (۰/۵)

(ب) روش اول: استفاده از روش متمم

(۰/۵) $\binom{۹}{۵} - \binom{۵}{۵} = ۱۲۵$ (۰/۵)

روش دوم: به روش مستقیم

(۰/۵) $\binom{۴}{۱} \binom{۵}{۴} + \binom{۴}{۲} \binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳} \binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۴} \binom{۵}{۱} = ۱۲۵$ (۰/۵)

(الف) (۰/۵) $A = \{(۵,۵)\}$, $B = \{(۶,۵), (۵,۶)\}$ (۰/۵)

(ب) خیر (۰/۵) زیرا: $A \cap B = \emptyset$ (۰/۵)

(الف) (۰/۵) $n(s) = ۶!$, $n(A) = ۵!$ (۰/۵)

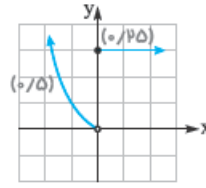
(۰/۵) $\Rightarrow P(A) = \frac{۵!}{۶!} = \frac{۱}{۶}$ (۰/۵)

(الف) کتی پیوسته (۰/۵)

(ب) کیفی اسمی (۰/۵)

(۰/۵) $f(۰) = ۳$, $f(-۴) = ۱۶$ (۰/۵)

-۱۱



(۰/۵) $a = \frac{-۲-۰}{۴-۲} = -۱$ (۰/۵)

-۱۲ روش اول:

(۰/۵) $y = ax + b$

(۰/۵) $\Rightarrow y = -x + b \xrightarrow{(۴, -۲)} b = ۲$ (۰/۵)

(۰/۵) $D = (۱, ۴]$, $R = [-۲, ۱)$ (۰/۵)

(۰/۵) $m = \frac{-۲-۰}{۴-۲} = -۱$ (۰/۵)

روش دوم:

(۰/۵) $\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$

(۰/۵) $\Rightarrow y - (-۲) = -۱(x - ۴) \Rightarrow y = -x + ۲$ (۰/۵)

(۰/۵) $D = (۱, ۴]$, $R = [-۲, ۱)$ (۰/۵)

(۰/۵) $f(x) = ax + b$

روش سوم:

(۰/۵) $\Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = ۰ \\ ۴a + b = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۲ \end{cases}$ (۰/۵)

(۰/۵) $D = (۱, ۴]$, $R = [-۲, ۱)$ (۰/۵)

-۱۳

